|  |  |
| --- | --- |
| KOVÁCS ISTVÁN  Matematika BSc BSc, 4. félév  Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar |  |

Témavezető:

|  |
| --- |
| Dr. Tóth Géza  egyetemi docens, BME VIK; tudományos főmunkatárs, MTA Rényi |

Többszörös fedések zárt sokszögekkel

A sík sokszoros fedéseinek vizsgálatát 50 éve Fejes Tóth László és Harold Davenport kezdeményezték. Egy síkbeli halmazokból álló H halmazrendszert k-szoros fedésnek nevezünk, ha a sík minden pontját legalább k halmaz tartalmazza. A legtöbbet vizsgált eset az, amikor H elemei egy adott S halmaz eltoltjai.

Tegyük fel, hogy a S halmaz eltoltjaival k-szorosan lefedtük a síkot, vagyis az eltoltakból álló H halmazrendszer egy k-szoros fedés. Igaz, hogy ha k elég nagy, akkor a fedés felbontható két (vagy több) fedésre? Pontosabban, léteznek-e olyan páronként diszjunkt H1, H2, … Hn részrendszerek, amelyek mindegyike fedés? Ez az egyszerű kérdés meglepően nehéz és mély problémákhoz vezet, amelyek nagy része máig megoldatlan. A kérdésnek, elméleti jelentősége és érdekessége mellett fontos gyakorlati alkalmazása is van, a szenzor-rendszerek ütemezésénél. Ezért ezzel a kérdéskörrel sokan foglalkoztak az utóbbi időben, különböző módszereket bevetve.

Egy síkbeli S halmazt fedés-felbonthatónak hívunk, ha létezik olyan k = k(S) szám, hogy a sík tetszőleges k-szoros fedése S eltoltjaival felbomlik két fedésre. 1980-ban Pach János vetette fel, hogy határozzuk meg a fedés-felbontható halmazokat. Sejtése szerint minden konvex halmaz fedés-felbontható. 1986-ban bebizonyította, hogy minden nyílt, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszög fedés-felbontható. 1987-ben Peter Manival bebizonyították, hogy a nyílt egységkör is fedés-felbontható, bár ezt máig nem publikálták. 20 évvel később Tardos Gábor és Tóth Géza nyílt háromszögekre, Pálvölgyi Dömötör és Tóth Géza pedig minden nyílt konvex sokszögre belátták hogy fedés-felbonthatók. Ugyanakkor Pach, Tardos és Tóth 2007-es eredménye alapján a konkáv négyszögek nem fedés-felbonthatók, később konkáv sokszögek egy tág osztályáról mutatták meg, hogy nem fedés-felbonthatók.

Az összes eddigi pozitív eredmény kizárólag nyílt sokszögekre (illetve körlapra) érvényes, zártakra csak akkor működnek a bizonyítások, ha feltesszük, hogy a fedés lokálisan véges, vagyis a sík minden pontja véges sokszor van lefedve. Meglepő módon éppen a végtelenszer fedett pontok okozzák a nehézséget.

A dolgozat fő eredménye, hogy bebizonyítjuk, hogy a zárt, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszögek is fedés-felbonthatóak.

A fedés-felbonthatóság tulajdonságnak sok egyéb változata van, például a sík fedése helyett vizsgálhatjuk (és felbonthatjuk) tetszőleges halmaz fedéseit is. Ezen kívül szorítkozhatunk csak véges sok illetve megszámlálható sok fedő halmazra, vagy megengedhetünk akármilyen sokat. A dolgozatban megvizsgáljuk a különböző változatok közti összefüggéseket, és bebizonyítjuk, hogy a nyílt és a zárt, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszögek mindegyik változatban fedés-felbonthatóak, sőt a végtelenszeres fedések két, szintén végtelenszeres fedésre is felbonthatóak.