|  |  |
| --- | --- |
| SZIKSZAI MÁRTON  Alkalmazott Matematika MSc, 3. félév  Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar |  |

Témavezető:

|  |
| --- |
| Dr. Hajdu Lajos  egyetemi tanár, DE TTK |

Rekurzív sorozatok egymást követő tagjainak legnagyobb közös osztóiról

Pillai a következő kérdést tette fel. Igaz-e, hogy bármely k≥2 egymást követő egész szám között létezik olyan, mely az összes többivel relatív prím? Pillai megmutatta, hogy előbbi kérdésre a válasz igen, amennyiben k≤16, ugyanakkor k=17 esetén már nem. Eredményét Brauer egészítette ki: k>17 mellett mindig található k olyan egymást követő egész, hogy egyik sem relatív prím az összes többivel.

A dolgozatban több, az előbbiekhez szorosan kapcsolódó problémát tekintünk. Legyen A egy tetszőleges egészekből álló sorozat; gA az a legkisebb szám, hogy létezik a sorozatnak ennyi darab egymást követő tagja, melyek közül egyik sem relatív prím az összes többivel; továbbá GA az a legkisebb szám, hogy bármely k≥GAesetén létezik k darab egymást követő tagja a sorozatnak ez utóbbi tulajdonsággal. Egy sorozatot Pillai sorozatnak fogunk nevezni, ha GA létezik.

Legyen u egy Lucas sorozat. A dolgozatban megmutatjuk, hogy néhány degenerált esettől eltekintve minden Lucas sorozat Pillai sorozat, továbbá minden sorozatra megadjuk gu és Gu pontos értékeit is. Hasonló eredményt mondunk ki Lehmer sorozatokra is. A bizonyítások közben választ adunk Beukers egy kérdésére is a nem degenerált Lucas sorozatok 1 és -1 elemeinek multiplicitásait illetően. Kiderül, hogy Pillai sorozatnak lenni "ritka" tulajdonság: már az ún. asszociált Lucas- és Lehmer sorozatok sem mindig azok.

Speciálisan mind a Fibonacci, mind a Lucas számok sorozatára kimondunk egy-egy tételt. Igazoljuk, hogy bármely k≤24 egymást követő Fibonacci számot tekintve mindig található ezek között olyan, mely az összes többivel relatív prím, ugyanakkor van olyan 25 darab egymást követő Fibonacci szám, hogy ez utóbbi nem teljesül. Megmutatjuk, hogy melyik az első 25 ilyen Fibonacci szám. Igazoljuk, hogy a Lucas számok L sorozata nem Pillai sorozat, viszont gL létezik és gL =171 teljesül.

Legáltalánosabb tételünkben az u tetszőleges rendű lineáris oszthatósági sorozat egymást követő tagjainak közös osztói helyett azok S-mentes részét tekintve, felső korlátot adunk a gu(T) és Gu(T) értékeire.

A dolgozat utolsó fejezetében nem lineáris rekurziók kapcsolatasan végzünk az előzőekkel teljesen analóg vizsgálatokat. Pontosabban, az ún. elliptikus oszthatósági sorozatokban vizsgáljuk a Pillai tulajdonságot, illetve a g és G mennyiségeket.